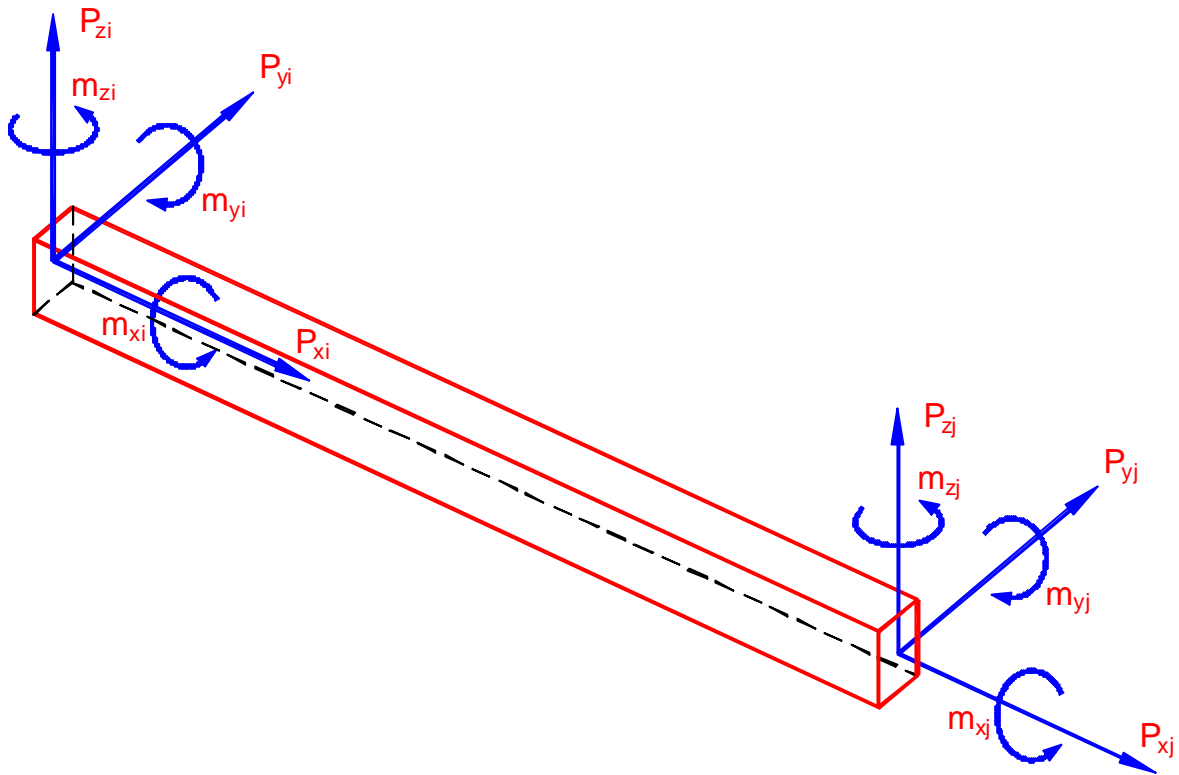


ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS ESPACIALES

Barra en el espacio en coordenadas locales



Los esfuerzos y desplazamiento en coordenadas locales serán

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \\ \dots \\ m_{xi} \\ m_{yi} \\ m_{zi} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_j = \begin{pmatrix} P_{xj} \\ P_{yj} \\ P_{zj} \\ \dots \\ m_{xj} \\ m_{yj} \\ m_{zj} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{d}}_i = \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \\ \dots \\ q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{d}}_j = \begin{pmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ d_{zj} \\ \dots \\ q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \end{pmatrix}$$

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son similares a las obtenidas en el pórtico plano y en el emparrillado plano

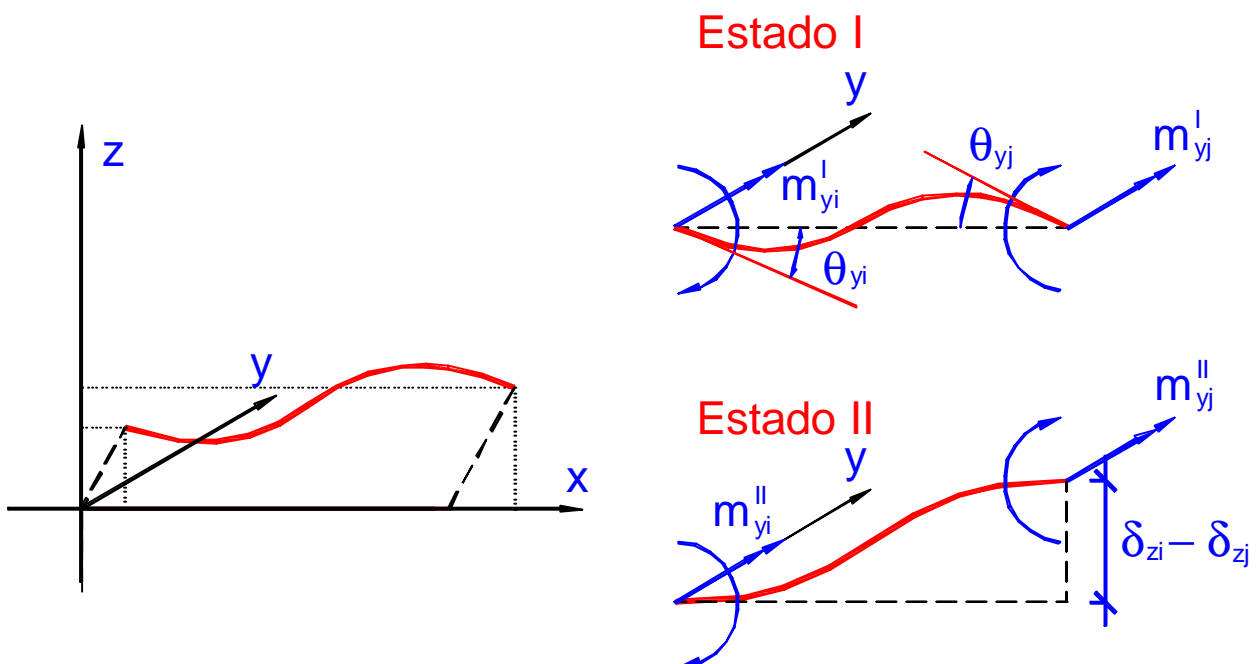
Esfuerzo axil.

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot d_{xj}$$

Momento torsor

$$m_{xi} = -m_{xj} = \frac{GJ}{l} \cdot q_{xi} - \frac{GJ}{l} \cdot q_{xj}$$

FLEXIÓN EN EL PLANO DEL ENTRAMADO

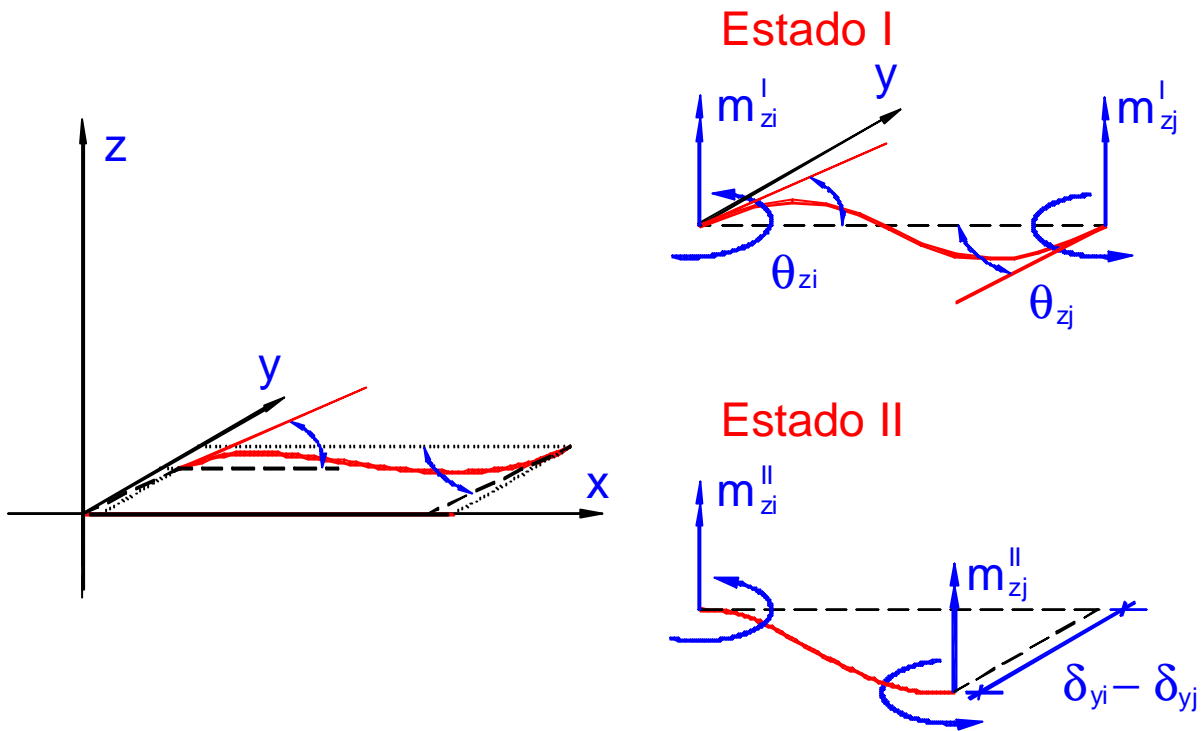


$$m_{yi} = -\frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{4EI_y}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{2EI_y}{l} \cdot \theta_{yj}$$

$$m_{yj} = -\frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{2EI_y}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{4EI_y}{l} \cdot \theta_{yj}$$

$$P_{zi} = -P_{zj} = -\frac{12EI_y}{l^3} \cdot d_{zi} + \frac{12EI_y}{l^3} \cdot d_{zj} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot \theta_{yi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot \theta_{yj}$$

FLEXIÓN EN EL PLANO NORMAL AL ENTRAMADO



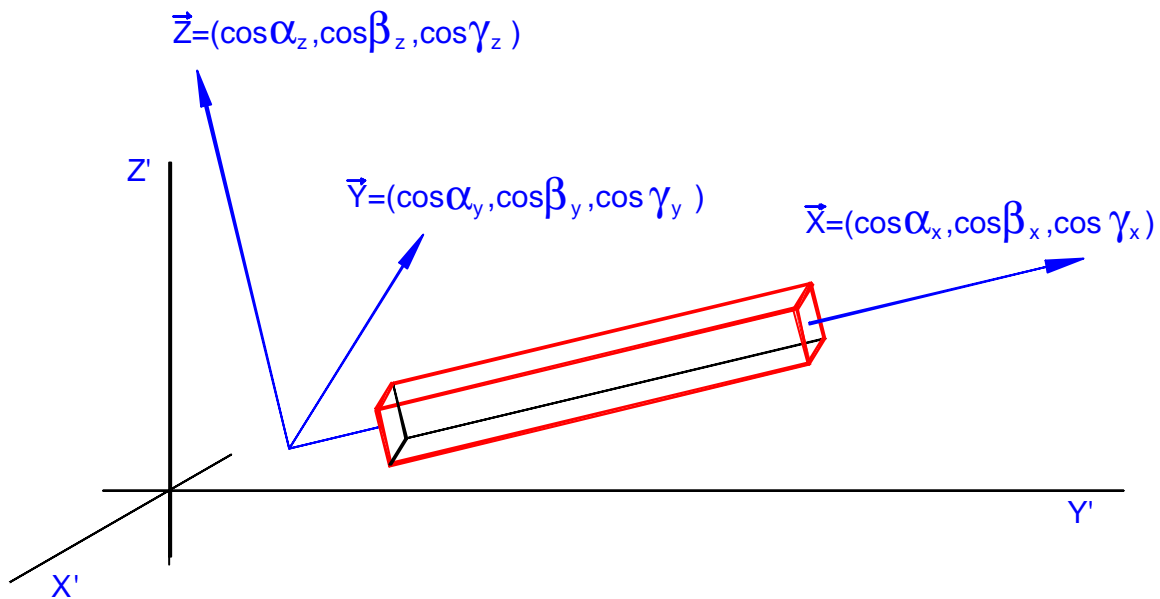
$$m_{zi} = \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yi} - \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{4EI_z}{l} \cdot \theta_{zi} + \frac{2EI_z}{l} \cdot \theta_{zj}$$

$$m_{zj} = \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yi} - \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{2EI_z}{l} \cdot \theta_{zi} + \frac{4EI_z}{l} \cdot \theta_{zj}$$

$$P_{yi} = -P_{yj} = \frac{12EI_z}{l^3} \cdot d_{yi} - \frac{12EI_z}{l^3} \cdot d_{yj} + \frac{6EI_z}{l^2} \cdot \theta_{zi} + \frac{6EI_z}{l^2} \cdot \theta_{zj}$$

CAMBIO DE COORDENADAS

Se pasan de coordenadas locales (x,y,z) a globales (x',y',z') por medio de una matriz de rotación que afecta a cada grupo de tres ejes



$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x & \cos \beta_x & \cos \gamma_x & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_y & \cos \beta_y & \cos \gamma_y & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_z & \cos \beta_z & \cos \gamma_z & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_x & \cos \beta_x & \cos \gamma_x \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_y & \cos \beta_y & \cos \gamma_y \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_z & \cos \beta_z & \cos \gamma_z \end{pmatrix}$$

Para pasar a coordenadas globales se procede como en los casos anteriores

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}'_i &= \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_i = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j = \tilde{\mathbf{S}}_{ii} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{S}}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \\ \tilde{\mathbf{P}}'_j &= \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}_j = \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{A}}^t \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j = \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_i + \tilde{\mathbf{S}}_{jj} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'_j \end{aligned}$$

CÁLCULO DE ESFUERZOS: ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS ESPACIALES

Para cada barra se aplica la ecuación de compatibilidad $\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}'$

Aplicando esta ecuación a los nudos origen y extremo de la barra

Nudo origen i

$$\mathbf{d}_{xi} = \mathbf{d}'_{xi} \cdot \cos \alpha_x + \mathbf{d}'_{yi} \cdot \cos \beta_x + \mathbf{d}'_{zi} \cdot \cos \gamma_x$$

$$\mathbf{d}_{yi} = \mathbf{d}'_{xi} \cdot \cos \alpha_y + \mathbf{d}'_{yi} \cdot \cos \beta_y + \mathbf{d}'_{zi} \cdot \cos \gamma_y$$

$$\mathbf{d}_{zi} = \mathbf{d}'_{xi} \cdot \cos \alpha_z + \mathbf{d}'_{yi} \cdot \cos \beta_z + \mathbf{d}'_{zi} \cdot \cos \gamma_z$$

$$\theta_{xi} = \theta'_{xi} \cdot \cos \alpha_x + \theta'_{yi} \cdot \cos \beta_x + \theta'_{zi} \cdot \cos \gamma_x$$

$$\theta_{yi} = \theta'_{xi} \cdot \cos \alpha_y + \theta'_{yi} \cdot \cos \beta_y + \theta'_{zi} \cdot \cos \gamma_y$$

$$\theta_{zi} = \theta'_{xi} \cdot \cos \alpha_z + \theta'_{yi} \cdot \cos \beta_z + \theta'_{zi} \cdot \cos \gamma_z$$

Nudo extremo j

$$\mathbf{d}_{xj} = \mathbf{d}'_{xj} \cdot \cos \alpha_x + \mathbf{d}'_{yj} \cdot \cos \beta_x + \mathbf{d}'_{zj} \cdot \cos \gamma_x$$

$$\mathbf{d}_{yj} = \mathbf{d}'_{xj} \cdot \cos \alpha_y + \mathbf{d}'_{yj} \cdot \cos \beta_y + \mathbf{d}'_{zj} \cdot \cos \gamma_y$$

$$\mathbf{d}_{zj} = \mathbf{d}'_{xj} \cdot \cos \alpha_z + \mathbf{d}'_{yj} \cdot \cos \beta_z + \mathbf{d}'_{zj} \cdot \cos \gamma_z$$

$$\theta_{xj} = \theta'_{xj} \cdot \cos \alpha_x + \theta'_{yj} \cdot \cos \beta_x + \theta'_{zj} \cdot \cos \gamma_x$$

$$\theta_{yj} = \theta'_{xj} \cdot \cos \alpha_y + \theta'_{yj} \cdot \cos \beta_y + \theta'_{zj} \cdot \cos \gamma_y$$

$$\theta_{zj} = \theta'_{xj} \cdot \cos \alpha_z + \theta'_{yj} \cdot \cos \beta_z + \theta'_{zj} \cdot \cos \gamma_z$$

Aplicando la ecuación constitutiva

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$$

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot d_{xj}$$

$$m_{xi} = -m_{xj} = \frac{GJ}{l} \cdot q_{xi} - \frac{GJ}{l} \cdot q_{xj}$$

$$m_{yi} = -\frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{4EI_y}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{2EI_y}{l} \cdot \theta_{yj}$$

$$m_{yj} = -\frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot d_{zj} + \frac{2EI_y}{l} \cdot \theta_{yi} + \frac{4EI_y}{l} \cdot \theta_{yj}$$

$$P_{zi} = -P_{zj} = -\frac{12EI_y}{l^3} \cdot d_{zi} + \frac{12EI_y}{l^3} \cdot d_{zj} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot \theta_{yi} + \frac{6EI_y}{l^2} \cdot \theta_{yj}$$

$$m_{zi} = \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yi} - \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{4EI_z}{l} \cdot \theta_{zi} + \frac{2EI_z}{l} \cdot \theta_{zj}$$

$$m_{zj} = \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yi} - \frac{6EI_z}{l^2} \cdot d_{yj} + \frac{2EI_z}{l} \cdot \theta_{zi} + \frac{4EI_z}{l} \cdot \theta_{zj}$$

$$P_{yi} = -P_{yj} = \frac{12EI_z}{l^3} \cdot d_{yi} - \frac{12EI_z}{l^3} \cdot d_{yj} + \frac{6EI_z}{l^2} \cdot \theta_{zi} + \frac{6EI_z}{l^2} \cdot \theta_{zj}$$

COMPROBACIÓN DE RESULTADOS: ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS ESPACIALES.

Se comprueba el equilibrio de los nudos, para las fuerzas verticales externas y para los momentos exteriores.

Es preciso pasar los esfuerzos sobre las barras a coordenadas globales

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{A}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{xi} \\ \mathbf{P}'_{yi} \\ \mathbf{P}'_{zi} \\ \dots \\ \mathbf{m}'_{xi} \\ \mathbf{m}'_{yi} \\ \mathbf{m}'_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{xi} \\ \mathbf{P}_{yi} \\ \mathbf{P}_{zi} \\ \dots \\ \mathbf{m}_{xi} \\ \mathbf{m}_{yi} \\ \mathbf{m}_{zi} \end{pmatrix}$$

Aplicando las condiciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x + \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_{xi} \cdot \cos \alpha_{xi} + \mathbf{P}_{yi} \cdot \cos \alpha_{yi} + \mathbf{P}_{zi} \cdot \cos \alpha_{zi}) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_{xi} \cdot \cos \beta_{xi} + \mathbf{P}_{yi} \cdot \cos \beta_{yi} + \mathbf{P}_{zi} \cdot \cos \beta_{zi}) = 0$$

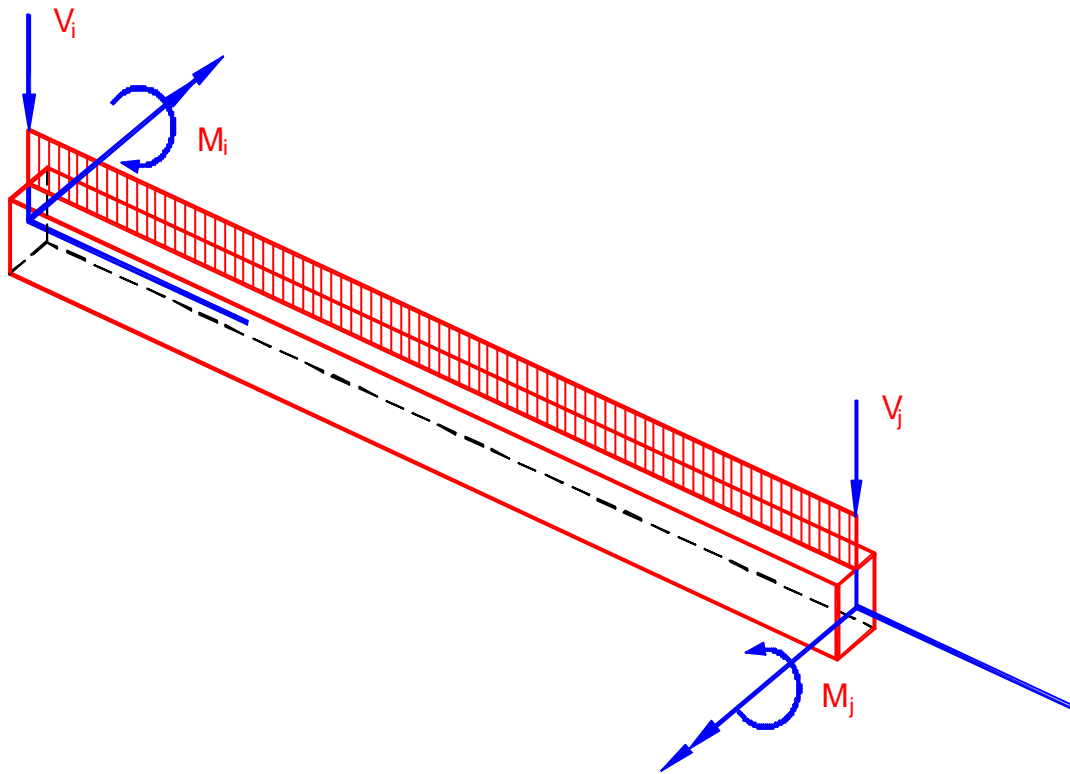
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_z + \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_{xi} \cdot \cos \gamma_{xi} + \mathbf{P}_{yi} \cdot \cos \gamma_{yi} + \mathbf{P}_{zi} \cdot \cos \gamma_{zi}) = 0$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x + \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{xi} \cdot \cos \alpha_{xi} + \mathbf{m}_{yi} \cdot \cos \alpha_{yi} + \mathbf{m}_{zi} \cdot \cos \alpha_{zi}) = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y + \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{xi} \cdot \cos \beta_{xi} + \mathbf{m}_{yi} \cdot \cos \beta_{yi} + \mathbf{m}_{zi} \cdot \cos \beta_{zi}) = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z + \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{xi} \cdot \cos \gamma_{xi} + \mathbf{m}_{yi} \cdot \cos \gamma_{yi} + \mathbf{m}_{zi} \cdot \cos \gamma_{zi}) = 0$$

ACCIONES SOBRE LAS BARRAS.- PÓRTICOS ESPACIALES



En el caso más frecuente de cargas verticales sobre la barra

Es preciso pasar los esfuerzos de empotramiento perfecto sobre las barras a coordenadas globales

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{A}^t \cdot \tilde{\mathbf{P}}$$

Nudo origen i

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{xi} \\ \mathbf{P}'_{yi} \\ \mathbf{P}'_{zi} \\ \dots \\ \mathbf{m}'_{xi} \\ \mathbf{m}'_{yi} \\ \mathbf{m}'_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_i \\ \dots \\ 0 \\ M_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i \cdot \cos \gamma_{xi} \\ V_i \cdot \cos \gamma_{yi} \\ V_i \cdot \cos \gamma_{zi} \\ \dots \\ M_i \cdot \cos \beta_{xi} \\ M_i \cdot \cos \beta_{yi} \\ M_i \cdot \cos \beta_{zi} \end{pmatrix}$$

Nudo extremo j

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{xj} \\ \mathbf{P}'_{yj} \\ \mathbf{P}'_{zj} \\ \dots \\ \mathbf{m}'_{xj} \\ \mathbf{m}'_{yj} \\ \mathbf{m}'_{zj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{xi} & \cos \beta_{xi} & \cos \gamma_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{yi} & \cos \beta_{yi} & \cos \gamma_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha_{zi} & \cos \beta_{zi} & \cos \gamma_{zi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_j \\ \dots \\ 0 \\ -M_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j \cdot \cos \gamma_{xi} \\ V_j \cdot \cos \gamma_{yi} \\ V_j \cdot \cos \gamma_{zi} \\ \dots \\ -M_j \cdot \cos \beta_{xi} \\ -M_j \cdot \cos \beta_{yi} \\ -M_j \cdot \cos \beta_{zi} \end{pmatrix}$$

Resultado final



Superposición E' + E''

MÉTODOS DE RENUMERACIÓN DE NUDOS

Objetivos

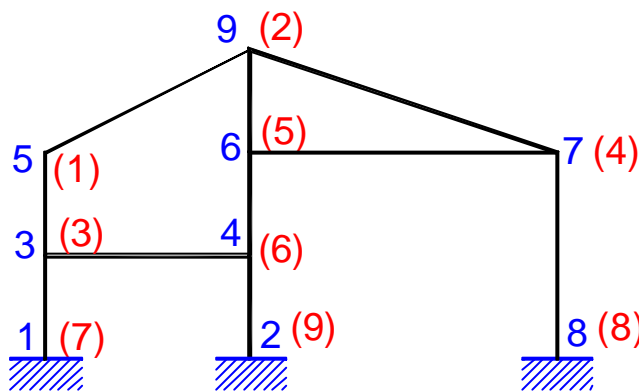


Reducir el espacio de almacenamiento
Reducir el tiempo de cálculo

ALGORITMO DE CUTHILL - Mc KEE

- 1 Se elige como punto inicial uno conectado a otros pocos nudos.
- 2 A partir de él se construye un grafo.
- 3 Se numeran los puntos de grafo en orden descendente.
- 4 Se reitera el proceso para todos los nudos.

EJEMPLO

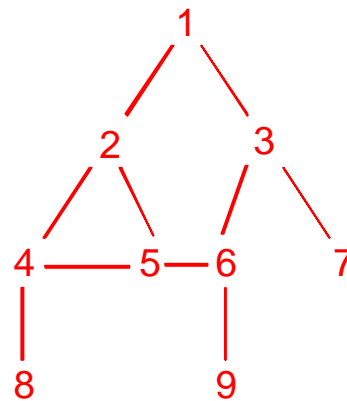
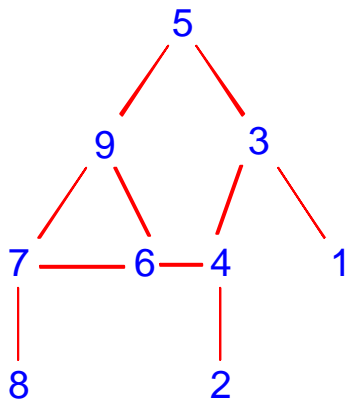


Ancho de Banda

$$(9-5+1) \cdot 3 = 15$$

Ancho de Banda

$$(5-2+1) \cdot 3 = 12$$



- ⊘ No conduce necesariamente a la solución óptima
- ⊘ Mejora si se efectúan permutaciones en cada nivel, pero a costa de un importante incremento de tiempo, que lo puede hacer inviable.
- ⊘ Es sencillo y fácil de programar.

SIMPLIFICACIONES EN EL CÁLCULO MATRICIAL

Objetivos

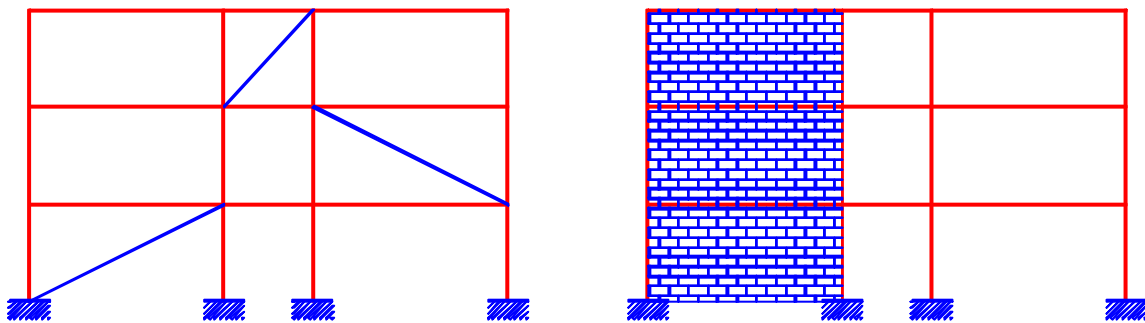


Reducir el número de grados de libertad
Simplificar modelizaciones complejas

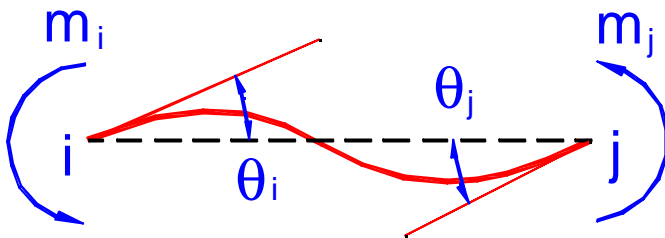
ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

Son aquellas cuyos nudos pueden girar pero no desplazarse

- ⌄ Por barras que triangulan la estructura
- ⌄ Por cerramientos sólidos que impiden el desplazamiento de los nudos



El cálculo se simplifica al no tener más que un grado de libertad por nudo:
El giro

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA.

El único grado de libertad (el giro) no depende del sistema de coordenadas. No es preciso cambio de ejes.

Momentos producidos por el estado 1.- Giro de los extremos.

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{m_i \cdot l}{3EI} - \frac{m_j \cdot l}{6EI} \\ q_j &= -\frac{m_i \cdot l}{3EI} + \frac{m_j \cdot l}{6EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m_i = \frac{4EI}{l} \cdot q_i + \frac{2EI}{l} \cdot q_j \\ m_j = \frac{2EI}{l} \cdot q_i + \frac{4EI}{l} \cdot q_j \end{cases}$$

Que puesto en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}}$$

El ensamblaje de matrices y la consideración de las cargas repartidas se hacen de la misma manera que en el caso general.

ESTRUCTURAS TRASLACIONALES

Son aquellas cuyos nudos pueden girar y desplazarse.

Puede simplificarse el tratamiento matricial si se consideran las siguientes hipótesis:

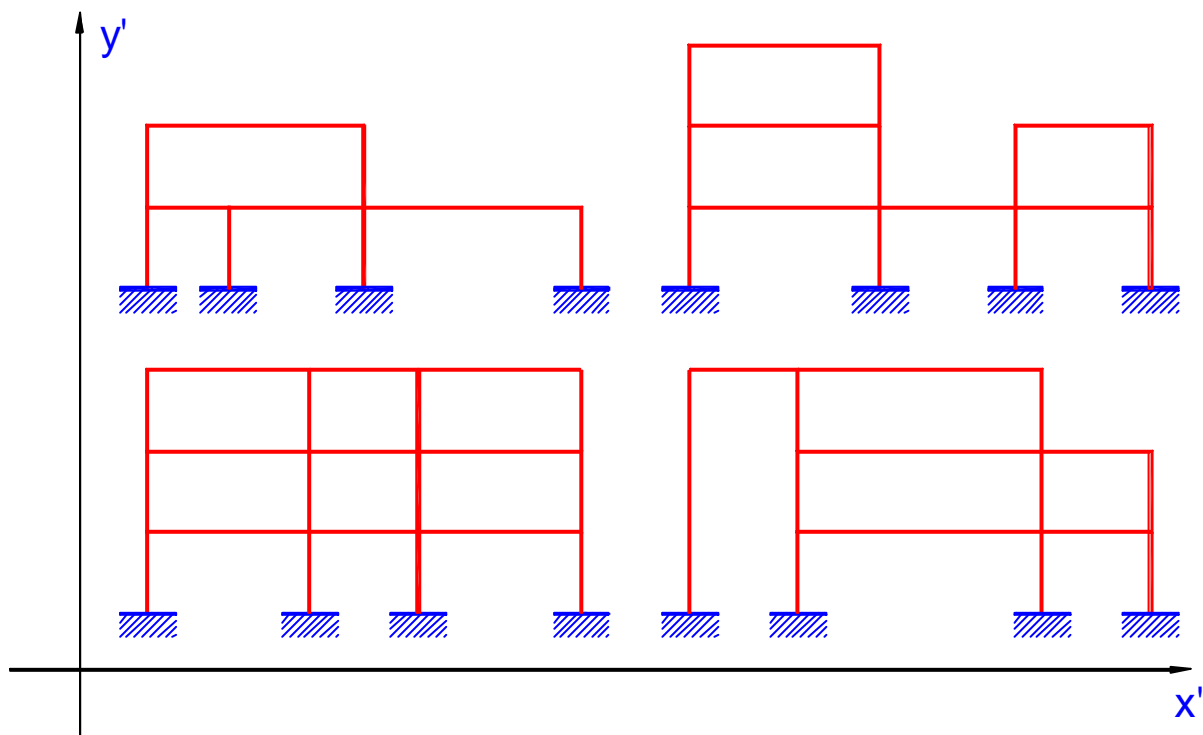
- ℄ Sólo se consideran deformaciones debidas a los momentos flectores. En consecuencia.

Los pilares se consideran indeformables a compresión.

El desplazamiento horizontal de los nudos del mismo dintel es idéntico.

Estas hipótesis son similares a las que se emplean en el método de Cross.

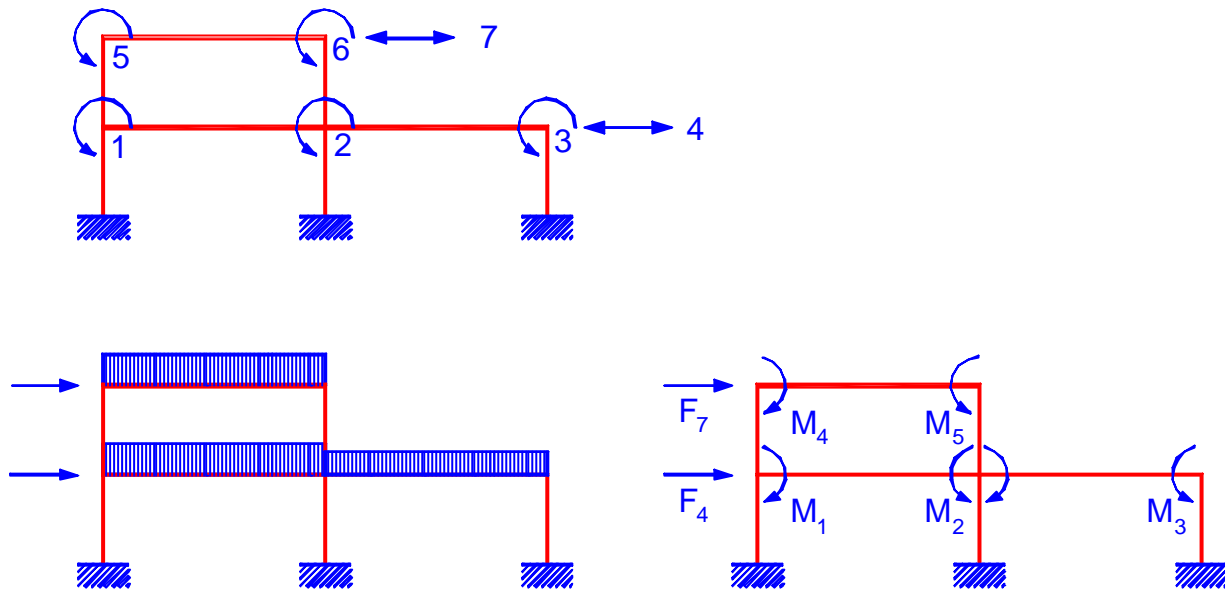
- ℄ El pórtico tiene sus vigas y pilares paralelos a los ejes globales.



- ℄ Todos los pilares llegan a cimentación.

NUMERACIÓN.

Es preciso numerar los grados de libertad de la estructura, no los nudos:



- C Giros en los nudos.
- C Desplazamientos en los dinteles horizontales.

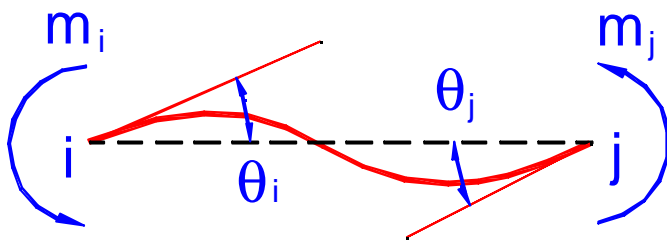
Vector de cargas

Vector de desplazamientos

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ F_7 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ d_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ d_7 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ.

En este caso los ejes locales coinciden con los globales, por lo que no es necesario considerar las matrices de compatibilidad.

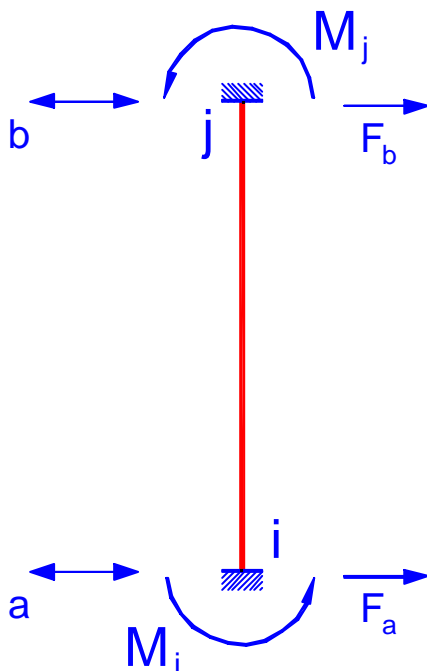


VIGAS

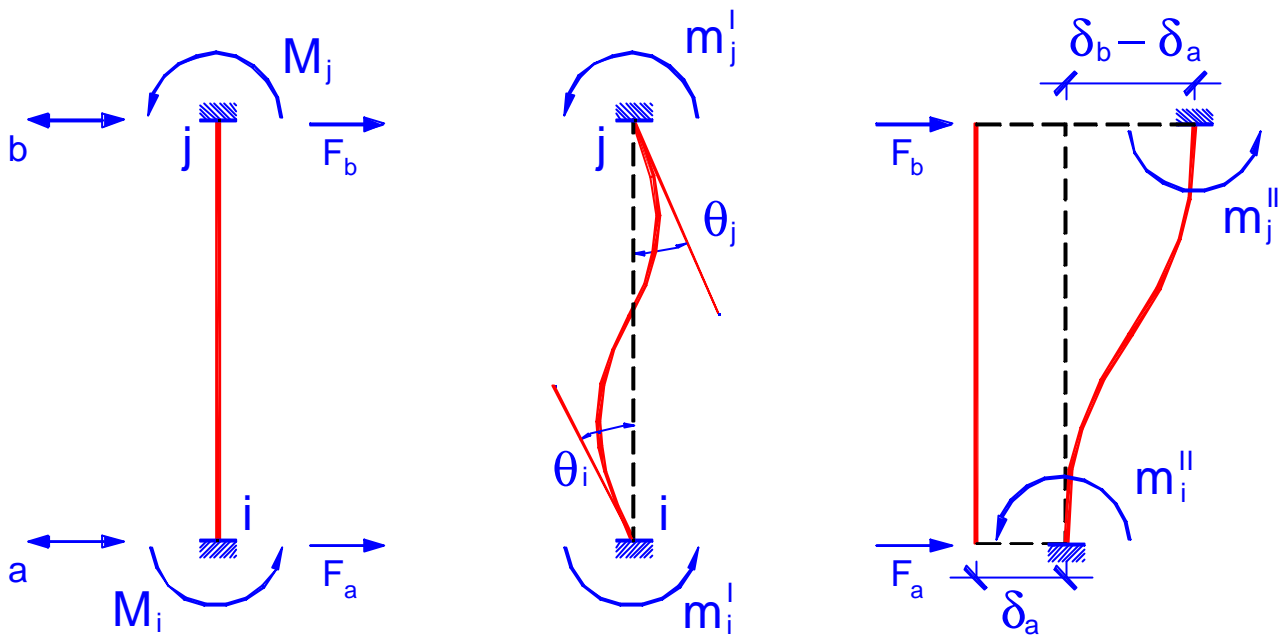
Los extremos tienen el mismo desplazamiento. Es idéntico al caso intralacional.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}}$$

PILARES



En un pilar actúan los momentos en sus extremos M_i y M_j y las fuerzas correspondientes a los desplazamientos horizontales de las plantas que une, F_a y F_b . El cálculo de la matriz de rigidez se hace como en el caso general.



Momentos producidos por el estado 1.- Giro de los extremos.

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{m_i^1 \cdot l}{3EI} - \frac{m_j^1 \cdot l}{6EI} \\ q_j &= -\frac{m_i^1 \cdot l}{6EI} + \frac{m_j^1 \cdot l}{3EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} m_i^1 &= \frac{4EI}{l} \cdot q_i + \frac{2EI}{l} \cdot q_j \\ m_j^1 &= \frac{2EI}{l} \cdot q_i + \frac{4EI}{l} \cdot q_j \end{aligned} \right.$$

Momentos producidos por el estado 2.- Desplaz. de los extremos.

$$m_i^2 = m_j^2 = \frac{6EI}{l^2} (d_b - d_a) = \frac{6EI}{l^2} \cdot d_b - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_a$$

El estado total es la suma de ambos

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{4EI}{l} \cdot q_i + \frac{2EI}{l} \cdot q_j - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_a + \frac{6EI}{l^2} \cdot d_b \\ m_j &= \frac{2EI}{l} \cdot q_i + \frac{4EI}{l} \cdot q_j - \frac{6EI}{l^2} \cdot d_a + \frac{6EI}{l^2} \cdot d_b \end{aligned}$$

Planteando la ecuación de equilibrio de la barra

$$F_a = -F_b = -\frac{m_i + m_j}{l} = -\frac{6EI}{l^2} \cdot q_i - \frac{6EI}{l^2} \cdot q_j + \frac{12EI}{l^3} \cdot d_a + \frac{12EI}{l^3} \cdot d_b$$

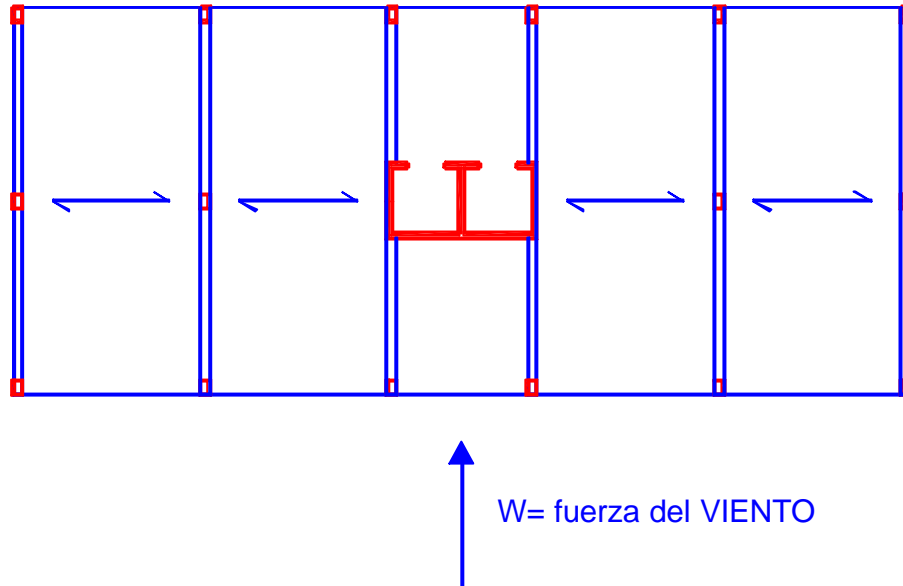
Poniendo todas estas ecuaciones en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ F_a \\ F_b \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{12EI}{l^3} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_{ii}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \\ d_a \\ d_b \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_i}$$

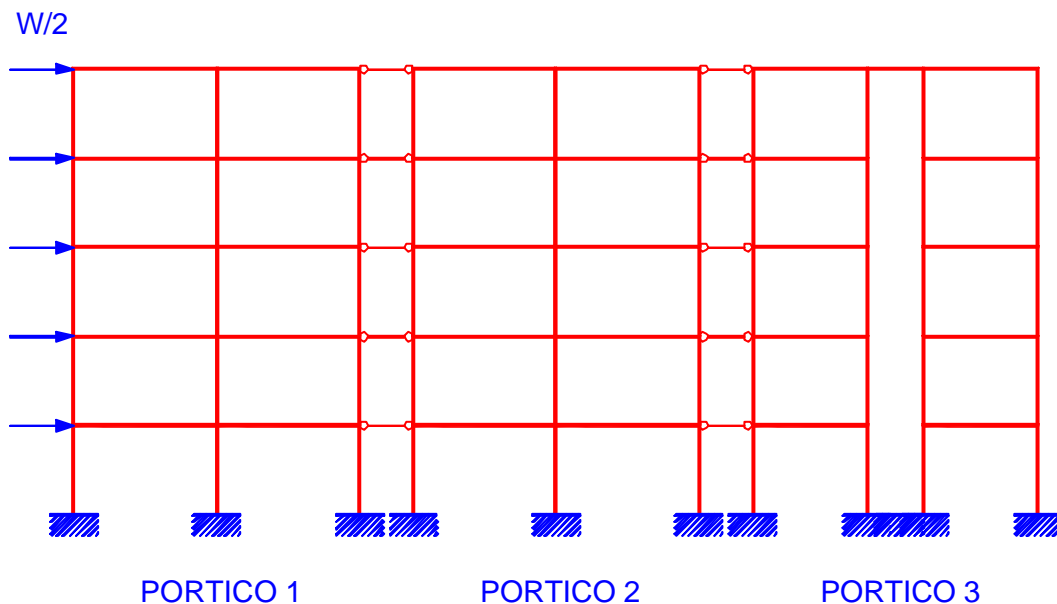
El ensamblaje de la matriz global y el tratamiento de las cargas repartidas se hacen como en el caso general

CÁLCULO MATRICIAL DE UN EDIFICIO COMPLETO

Desplazamiento en una sola dirección



Pueden acoplarse los pórticos por medio de bielas por tener el mismo desplazamiento lateral.

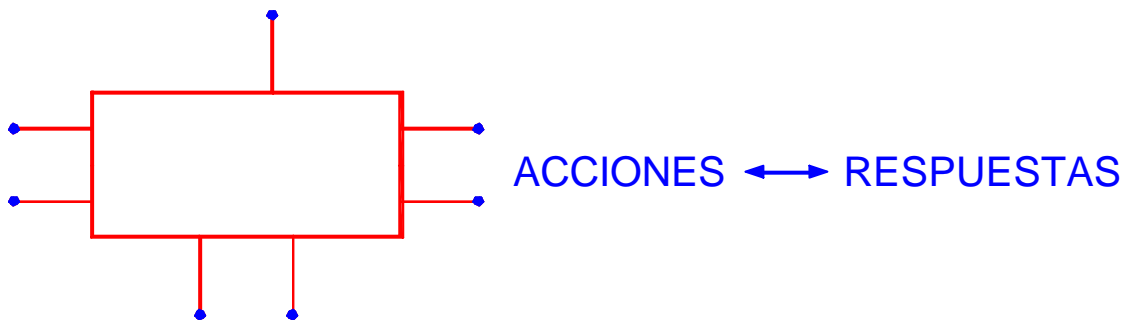


SUBESTRUCTURAS

Proceso general del cálculo matricial.

- ℄ Se estudia el comportamiento de un elemento en función de los desplazamientos de sus dos extremos.
- ℄ Se ensamblan todas las barras de la estructura en una matriz de rigidez global.
- ℄ Se resuelve el sistema de ecuaciones y se calculan los esfuerzos.

También es posible ensamblar un conjunto de barras siempre que sea posible formular los esfuerzos en los nudos de unión con el resto de la estructura en función de los desplazamientos de esos nudos. Este conjunto se llama **subestructura**.



La subestructura funciona como una “caja negra”

Para obtener la matriz de rigidez de la subestructura:

- ℄ Se plantea la matriz de rigidez total de todas las barras afectadas.
- ℄ Se condensan de esa matriz el conjunto de grados de libertad que interesen.

Se facilita enormemente el proceso ordenando los grados de libertad de forma tal que queden agrupados los que interese condensar.

Planteamiento teórico

$$\mathbf{A} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{Sistema global}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}}$$

$$\mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

Sistema condensado

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^* \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}^*} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^* \\ \mathbf{b}_2^* \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}^*}$$

Desarrollando el sistema anterior

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{x}_2)$$

$$\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{x}_2) + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

$$(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}) \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{A}_{22}^* \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2^*$$

De donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{22}^* &= \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{b}_2^* &= \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Para condensar los grados de libertad es muy cómodo aplicar el algoritmo de Gauss, siempre que estén al final. En caso contrario se necesitan algoritmos especiales.

ANÁLISIS NO LINEAL

Principales causas:

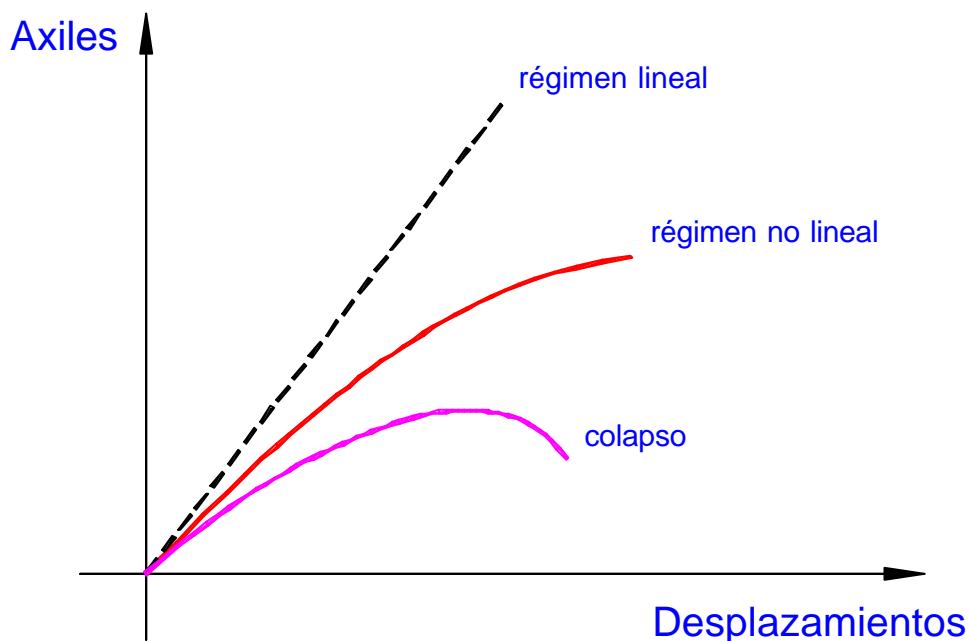
- ⌄ Comportamientos no lineales del material
- ⌄ Grandes desplazamientos
- ⌄ Modificaciones del estado tensional por la deformación

En este apartado sólo se van a analizar los efectos no lineales de la variación de rigidez por efecto del esfuerzo axial → Variaciones del estado tensional por la deformación de la barra

Aumento de axiles → Disminuye la rigidez →

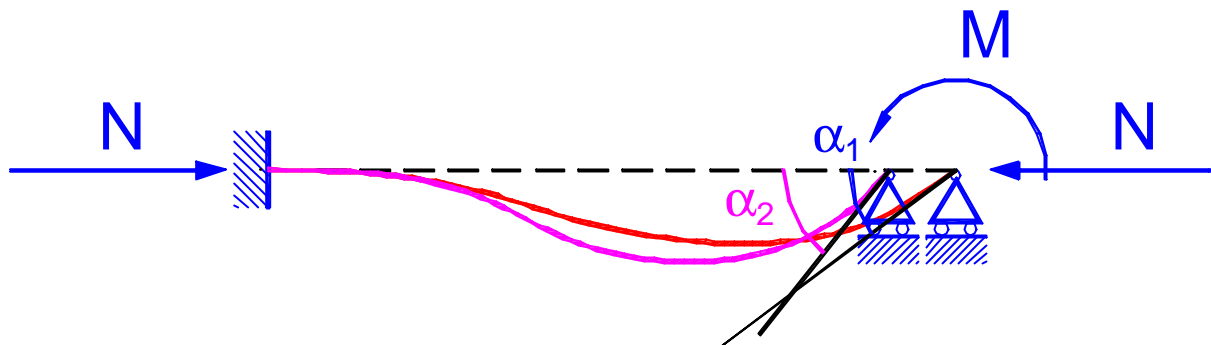
Mayor deformación → Tendencia a inestabilidad →

La estructura se hace inestable cuando la matriz sea singular (autovalor nulo)



COLAPSO → PANDEO GENERALIZADO del PORTICO

El esfuerzo axial modifica la rigidez \longrightarrow Análisis no lineal



El efecto del axil sobre la estructura deformada hace que aumente el giro α

$\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$

La rigidez $R = \frac{M}{a}$ disminuye al aumentar α

Fases del cálculo no lineal

- C Se hace un cálculo lineal
- C Con los axiles calculados se modifica la matriz de rigidez
- C Se efectúa un nuevo cálculo con la rigidez corregida
- C Se continua la iteración hasta que la diferencia de axiles en dos cálculos consecutivos sea menor que lo prefijado

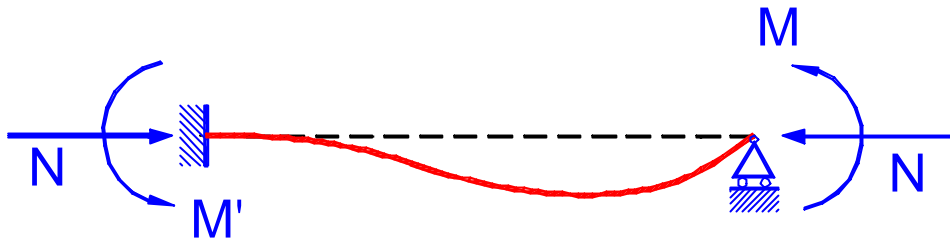
La matriz de rigidez en coordenadas locales será

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{v}_i \\ \ddot{m}_i \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{v}_j \\ \ddot{m}_j \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} \times F_1 & \frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \vdots & 0 & -\frac{12EI}{l^3} \times F_1 & \frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \ddots \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \frac{4EI}{l} \times F_3 & \vdots & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \frac{2EI}{l} \times F_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} \times F_1 & -\frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \vdots & 0 & \frac{12EI}{l^3} \times F_1 & -\frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \vdots \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \frac{2EI}{l} \times F_4 & \vdots & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \times F_2 & \frac{4EI}{l} \times F_3 & \ddots \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_{ii}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{v}_i \\ \ddot{m}_i \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{v}_j \\ \ddot{m}_j \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_i}$$

Siendo $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ unas funciones de estabilidad definidas como

Se calcula la rigidez ($s = M/q$) y el factor de transmisión ($t = M'/M$) en función del porcentaje del axil sobre la carga crítica de pandeo

BARRA COMPRIMIDA



$$r = -\frac{N}{\frac{p^2 \times EI}{l^2}} > 0 \qquad a = \frac{p}{2} \times \sqrt{r}$$

$$s = \frac{(1 - 2a \times \text{ctg } 2a) a}{\text{tg } a - a}$$

$$t = \frac{2a - \text{sen } 2a}{\text{sen } 2a - 2a \times \text{cos } 2a}$$

BARRA TRACCIONADA

$$r = -\frac{N}{\frac{p^2 \times EI}{l^2}} < 0 \qquad g = \frac{p}{2} \times \sqrt{-r}$$

$$s = \frac{(1 - 2g \times \text{cth } 2g) g}{\text{tg } g - g}$$

$$t = \frac{2g - \text{sh } 2g}{\text{sh } 2g - 2g \times \text{ch } 2g}$$

Suponiendo despreciable el efecto del cortante

$$F_1 = \underbrace{\frac{s \times (1+t)}{6} - \frac{a^2}{3}}_{r > 0} \quad \text{o} \quad F_1 = \underbrace{\frac{s \times (1+t)}{6} + \frac{g^2}{3}}_{r < 0}$$

$$F_2 = \frac{s \times (1+t)}{6}$$

$$F_3 = \frac{s}{4} \qquad F_4 = \frac{s \times t}{2}$$

Como los desplazamientos son muy pequeños se supone que no varían las orientaciones de los ejes locales, ni la matriz de compatibilidad.

NOTA.- Para valores reducidos del esfuerzo axial $|N| < 0,05 t$ el ordenador puede cometer graves errores de truncadura al calcular s y t. En estos casos se hace directamente

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$$

La matriz de rigidez global será

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} a & c & d & : & -a & -c & d \\ c & b & e & : & -c & -b & e \\ d & e & f & : & -d & -e & g \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -c & -d & : & a & c & -d \\ -c & -b & -e & : & c & b & -e \\ d & e & g & : & -d & -e & f \end{pmatrix} \quad \text{Siendo}$$

$$a = \frac{EA}{I} \times \cos^2 a + \frac{12EI}{I^3} \times \sin^2 a \times F_1$$

$$b = \frac{EA}{I} \times \sin^2 a + \frac{12EI}{I^3} \times \cos^2 a \times F_1$$

$$c = \frac{EA}{I} \times \sin a \times \cos a - \frac{12EI}{I^3} \times \sin a \times \cos a \times F_1$$

$$d = -\frac{6EI}{I^2} \times \sin a \times F_2 \quad ; \quad e = \frac{6EI}{I^2} \times \cos a \times F_2$$

$$f = \frac{4EI}{I} \times F_3 \quad ; \quad g = \frac{2EI}{I} \times F_4$$

CÁLCULO DE ESFUERZOS

Para cada barra se aplica la ecuación de compatibilidad

$$\tilde{d} = \tilde{A} \cdot \tilde{d}' \quad \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d'_{xi} \\ d'_{yi} \\ q'_i \end{pmatrix}$$

Aplicando esta ecuación a los nudos origen y extremo de la barra

Nudo origen i

$$d_{xi} = \cos a \cdot d'_{xi} + \sin a \cdot d'_{yi}$$

$$d_{yi} = -\sin a \cdot d'_{xi} + \cos a \cdot d'_{yi}$$

$$q_i = q'_i$$

Nudo extremo j

$$d_{xj} = \cos a \cdot d'_{xj} + \sin a \cdot d'_{yj}$$

$$d_{yj} = -\sin a \cdot d'_{xj} + \cos a \cdot d'_{yj}$$

$$q_j = q'_j$$

Aplicando la ecuación constitutiva

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}$$

$$P_{xi} = -P_{xj} = \frac{EA}{l} \cdot d_{xi} - \frac{EA}{l} \cdot d_{xj}$$

$$P_{yi} = -P_{yj} = \frac{12EI}{l^3} \times d_{yi} - \frac{12EI}{l^3} \times d_{yj} \times \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \times F_1 + \frac{6EI}{l^2} \times q_i + \frac{6EI}{l^2} \times q_j \times \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \times F_1$$

$$m_i = \frac{6EI}{l^2} \times d_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \times d_{yj} \times \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \times F_2 + \frac{4EI}{l} \times q_i \times F_3 + \frac{2EI}{l} \times q_j \times F_4$$

$$m_j = \frac{6EI}{l^2} \times d_{yi} - \frac{6EI}{l^2} \times d_{yj} \times \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \times F_2 + \frac{2EI}{l} \times q_i \times F_4 + \frac{4EI}{l} \times q_j \times F_3$$

La comprobación de resultados se efectúa de la misma forma que en los pórticos planos en los que no se ha considerado la variación de rigidez con el axil.